

xyz 空間において、平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし、点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円すいを A とする。次に、平面 $z=0$ 上の点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を H 、平面 $z=1$ 上の点 $(1, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。 H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。円すい A と円柱 B の共通部分を C とする。 $0 \leq t \leq 1$ をみたす実数 t に対し、平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。 $t=1-\cos\theta$ のとき、 $S(t)$ を θ で表せ。

(2) C の体積 $\int_0^1 S(t)dt$ を求めよ。

(東京大)