

関数  $f(x)$  は  $(-\infty, +\infty)$  において 2 回微分可能で  $f''(0) = -1$  を満たし、かつ任意の実数  $x, y$  に対して、

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

を満たす。

- (1)  $f(0)$  の値を求めよ。また、 $y$  について微分して  $f'(0)$  の値を求めよ。
- (2)  $f''(x) = -f(x)$  を導け。
- (3)  $F(x) = f(x)\cos x - f'(x)\sin x$ ,  $G(x) = f(x)\sin x + f'(x)\cos x$  とおいたとき、関数  $F(x), G(x)$  はともに定数であることを証明し、それらの値を求めよ。
- (4)  $f(x)$  を決定せよ。

(東京理科大)