

θ を実数とし, 行列 $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ。

(1) 行列 R の逆行列 R^{-1} を求めよ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 11 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix}$ について, 行列の積 $R^{-1}AR$ が適当な実数 λ_1, λ_2 を用いて $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形になるような θ を $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で求めよ。

(3) (2) の行列 A について, n を自然数として, A^n を求めよ。ただし, 必要であれば以下の公式を用いてよい。

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ のとき } D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

(芝浦工業大)