

実数を成分にもつ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 r, s が下の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとする。

(i) $s > 1$

(ii) $A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

このとき以下の問に答えよ。

(1) $B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a, c, r, s を用いて表せ。

(2) $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ を示せ。

(3) $c = 0$ かつ $|a| < 1$ を示せ。

(東京大)