

$n$  を 3 以上の自然数とするとき、次を示せ。ただし、 $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  とし、 $i$  を虚数単位とする。

$$(1) \alpha^k + \overline{\alpha^k} = 2 \cos \frac{2\pi k}{n}$$

ただし、 $k$  は自然数とし、 $\overline{\alpha}$  は  $\alpha$  に共役な複素数とする。

$$(2) n = (1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \cdots (1 - \alpha^{n-1})$$

$$(3) \frac{n}{2^{n-1}} = \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{n-1}{n} \pi$$

(北海道大)