

$n=1, 2, \dots$ に対して x の整式

$$P_n(x) = x^3 - nx^2 - (2n+12)x - 8$$

を考える。以下の問に答えよ。

(1) 3次方程式 $P_n(x)=0$ の正の実数解はただ1つであることを示せ。

(2) t が $P_n(x)=0$ の解であるとき、 $P_n\left(-\frac{4}{t+2}\right)$ を求めよ。

(3) $P_n(x)=0$ の正の実数解を α_n とするとき、 $P_n(x)=0$ の最小の実数解 β_n を α_n で表せ。

さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ。

(早稲田大)