

$a_1 = \frac{1}{2}$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n=1, 2, 3, \dots$ に対し $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく。

$n > 1$ のとき, $b_n > 2n$ となることを示せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ を求めよ。

(東京大)