

$f(x) = x \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $g(x) = \log(1+x^2)$ (x は実数) とおく。ただし, $\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ。

(2) $x > 0$ のとき $f(x) > g(x)$ であることを証明せよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(k^2 + n^2) \right) - 2 \log n \right\}$ の値を求めよ。

(千葉大)